দ্বিপদী বিস্তৃতি
(Binomial Expansions)

ইউনিট ৪

ভূমিকা

দ্বিপদী উপপাদ্যের আবিষ্কারক স্যার আইজাক নিউটন। উপপাদ্যটির বিভিন্ন দিকে গণিতবিদ ওমর খৈয়ামেরও যথেষ্ট অবদান রয়েছে। উপপাদ্যটি গণিত শাস্ত্রে যথেষ্ট গুরুত্বপূর্ণ ও প্রয়োজনীয়। দ্বিপদী রাশি বা বহুপদী রাশির ঘাত বা শক্তি তিন এর বেশি হলে সে ক্ষেত্রে রাশির মান নির্ণয় যথেষ্ট শ্রমসাধ্য ও সময় সাপেক্ষ হয়ে পড়ে। এ ইউনিটে দ্বিপদী উপপাদ্য, দ্বিপদী উপপাদ্যের বিস্তৃতি, দ্বিপদী বিস্তৃতির সাধারণ পদ, মধ্যপদ, দ্বিপদী ধারা ইত্যাদি সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- দ্বিপদী উপপাদ্য ও এর বৈশিষ্ট সম্পর্কে লিখতে পারবেন,
- গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দ্বিপদী উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবেন,
- প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগ নির্ণয় করতে পারবেন,
- দ্বিপদী বিস্তৃতির সাধারণ পদ নির্ণয় করতে পারবেন,
- দ্বিপদী বিস্তৃতির মধ্য পদ নির্ণয় করতে পারবেন,
- দ্বিপদী ধারা সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১৫ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৪.১: গাণিতিক আরোহ বিধি
পাঠ ৪.২: প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র
পাঠ ৪.৩: $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ নির্ণয়
পাঠ ৪.৪: $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয়
পাঠ ৪.৫: দ্বিপদী ধারা

পাঠ ৪.১ গাণিতিক আরোহ বিধি

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দ্বিপদী উপপাদ্যের প্রমাণ করতে পারবেন,
- দ্বিপদী উপপাদ্যের বৈশিষ্ট বর্ণনা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	দ্বিপদী রাশি, দ্বিপদী উপপাদ্য, আরোহ বিধি

মূলপাঠ

গাণিতিক আরোহ বিধিঃ মনে করুন, স্বাভাবিক সংখ্যার সেটN এবং অপর একটি সেট $n \subseteq \Sigma$ যা $\Sigma \in \mathrm{N}$ এরূপ হয় যে,

(i) $1 \in \Sigma$

(ii) $n \in \Sigma, n+1 \in \Sigma$ যেখানে $n \in \mathrm{N}$

তাহলে এ সম্পর্কটি N এর একটি মৌলিক স্বীকার্য। এ স্বীকার্যকে গাণিতিক আরোহ বিধি বলা হয়।

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিঃ

স্বাভাবিক সংখ্যা $n \in \mathrm{N}$ সম্বলিত কোন রাশি যদি $n=1$ এর জন্য সত্য হয় এবং রাশিটি $n \in \mathrm{N}$ এর জন্য সত্য ধরে যদি তা $n+1 \in \mathrm{N}$এর জন্য সত্য হয়, তবে উক্তিটি সকল $n \in \mathrm{N}$ এর জন্য সত্য হবে।

দ্বিপদী রাশি

দুইটি পদের যোগফল বা বিয়োগফল আকারে প্রকাশিত যে কোন রাশিকে দ্বিপদী রাশি বলা হয়। যেমনঃ $a+x,\ 5x-3y,\ 2x^2+3y$ ইত্যাদি দ্বিপদী রাশি।

দ্বিপদী উপপাদ্যঃ যে বীজগণিতীয় সূত্রের সাহায্যে একটি দ্বিপদ রাশির যে কোন শক্তি বা মূলকে একটি ধারায় প্রকাশ করা যায় তাকে দ্বিপদী উপপাদ্য বলে।

$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x^1 + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_r a^{n-r}x^r + \ldots\ldots + {}^nC_n x^n$,এই সূত্রটিকে দ্বিপদী উপপাদ্য বলে।

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দ্বিপদী উপপাদ্যের প্রমাণ :

$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + {}^2C_1 a^{2-1}x^1 + {}^2C_2 a^{2-2}x^2$ ------------(i)

$[\because {}^2C_1 = 2,\ {}^2C_2 = 1]$

$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = a^3 + {}^3C_1 a^{3-1}x^1 + {}^3C_2 a^{3-2}x^2 + {}^3C_3 a^{3-3}x^3$ ----------- (ii)

$[\because {}^3C_1 = 3,\ {}^3C_2 = 3,\ {}^3C_3 = 1]$

সুতরাং সূত্রটি $n=2$, $n=3$এর জন্য সত্য। এখন মনে করুন সূত্রটি $n=k$ এর জন্য সত্য।

$\therefore (a+x)^k = a^k + {}^kC_1 a^{k-1}x^1 + {}^kC_2 a^{k-2}x^2 + \ldots\ldots + {}^kC_r a^{k-r}x^r + \ldots\ldots + {}^kC_k x^k$ --------- (iii)

(iii)এর উভয়দিকে$(a+x)$দ্বারা গুণ করে আমরা পাই,

$(a+x)^k(a+x) = (a+x)\{a^k + {}^kC_1 a^{k-1}x^1 + {}^kC_2 a^{k-2}x^2 + \ldots\ldots + {}^kC_r a^{k-r}x^r + \ldots\ldots + {}^kC_k x^k\}$

$\therefore (a+x)^{k+1} = a^{k+1} + {}^kC_1 a^k x^1 + {}^kC_2 a^{k-1}x^2 + \ldots\ldots + {}^kC_r a^{k-r+1}x^r + \ldots\ldots + {}^kC_k a x^k$

$+ a^k x + {}^kC_1 a^{k-1}x^2 + {}^kC_2 a^{k-2}x^3 + \ldots\ldots + {}^kC_{r-1} a^{k-r+1}x^r + {}^kC_r a^{k-r}x^{r+1} + \ldots\ldots + {}^kC_k x^{k+1}$

$= a^{k+1} + (1 + {}^kC_1)a^k x^1 + ({}^kC_2 + {}^kC_1)a^{k-1}x^2 + \ldots\ldots + ({}^kC_r + {}^kC_{r-1})a^{k-r+1}x^r + \ldots\ldots + {}^kC_k x^{k+1}$ -----(iv)

যেহেতু, ${}^{k}C_r + {}^{k}C_{r-1} = {}^{k+1}C_r$,

অতএব, ${}^{k}C_1 + {}^{k}C_0 = {}^{k}C_1 + 1 = {}^{k+1}C_1$,

${}^{k}C_2 + {}^{k}C_1 = {}^{k+1}C_2$ ইত্যাদি।

$$\therefore (a+x)^{k+1} = a^{k+1} + {}^{k+1}C_1 a^k x + {}^{k+1}C_2 a^{k-1} x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^{k+1}C_r a^{k-r+1} x^r + \ldots\ldots + {}^{k+1}C_{k+1} x^{k+1} \text{ ----------- (v)}$$

(v)নং হতে দেখা যায়,(iii)নং সূত্রটি$n = k+1$এর জন্যও সত্য।

অতএব সূত্রটি যদি$n = 2$এর জন্য সত্য হয়, তবে উহা$n = 2+1 = 3$এর জন্যও সত্য। আবার$n=3$এর জন্য সত্য হলে,$n=4$এর জন্যও সত্য। সুতরাংnএর সকল ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার জন্য উপপাদ্যটি সত্য।

$$(a+x)^n = a^n + {}^{n}C_1 a^{n-1} x^1 + {}^{n}C_2 a^{n-2} x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^{n}C_r a^{n-r} x^r + \ldots\ldots + {}^{n}C_n x^n$$

দ্বিপদী উপপাদ্যের বৈশিষ্ট্য:

(i) উপপাদ্যের বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ থাকে।

(ii) বিস্তৃতির প্রত্যেক পদে a এবং xএর ঘাতের সমষ্টি সমান থাকে।

(iii) বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ পদ হতে সমদূরবর্তী পদগুলোর সহগ পরস্পর সমান থাকে।

অনুসিদ্ধান্ত1:

$$(a+x)^n = a^n + {}^{n}C_1 a^{n-1} x^1 + {}^{n}C_2 a^{n-2} x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^{n}C_r a^{n-r} x^r + \ldots\ldots + {}^{n}C_n x^n \text{ --------------- (1)}$$

(1)নং এ$a=1$বসিয়ে পাই,

$$(1+x)^n = 1^n + {}^{n}C_1 1^{n-1} x^1 + {}^{n}C_2 1^{n-2} x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^{n}C_r 1^{n-r} x^r + \ldots\ldots + {}^{n}C_n x^n$$

$$(1+x)^n = 1 + {}^{n}C_1 x + {}^{n}C_2 x^2 + {}^{n}C_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^{n}C_r x^r + \ldots\ldots + {}^{n}C_n x^n$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} x^r + \ldots\ldots + x^n$$

অনুসিদ্ধান্ত 2:

$$(a+x)^n = a^n + {}^{n}C_1 a^{n-1} x^1 + {}^{n}C_2 a^{n-2} x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^{n}C_r a^{n-r} x^r + \ldots\ldots + {}^{n}C_n x^n \text{ --------------- (1)}$$

(1)নং এ$x=-x$ বসিয়ে পাই,

$$(a-x)^n = a^n + {}^{n}C_1 a^{n-1} (-x)^1 + {}^{n}C_2 a^{n-2} (-x)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^{n}C_r a^{n-r} (-x)^r + \ldots\ldots + {}^{n}C_n (-x)^n$$

$$= a^n + {}^{n}C_1 a^{n-1} (-1)^1 x + {}^{n}C_2 a^{n-2} (-1)^2 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^{n}C_r a^{n-r} (-1)^r x^r + \ldots\ldots + (-1)^n x^n$$

সারসংক্ষেপ

- (i) $1 \in \Sigma$ (ii) $n \in \Sigma, n+1 \in \Sigma$ যেখানে $n \in$ Nতাহলে এ সম্পর্কটি Nএর একটি মৌলিক স্বীকার্য। এ স্বীকার্যকে গাণিতিক আরোহ বিধি বলা হয়।
- উপপাদ্যের বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ থাকে।
- বিস্তৃতির প্রত্যেক পদে a এবং xএর ঘাতের সমষ্টি সমান থাকে।
- বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ পদ হতে সমদূরবর্তী পদগুলোর সহগ পরস্পর সমান থাকে।

পাঠ ৪.২ প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- প্যাসকেল ত্রিভুজের সাহায্যে দ্বিপদী বিস্তৃতি করতে পারবেন,
- প্যাসকেল ত্রিভুজের সাহায্যে দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগ নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	প্যাসকেল ত্রিভুজ, দ্বিপদী বিস্তৃতি, দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগ

মূলপাঠ

ফরাসি পদার্থ বিজ্ঞানী ব্লেইজ প্যাসকেল (Blaise Pascal, 1623-1662) ছোটবেলা থেকেই অসামান্য মেধাবী ছিলেন। 1653সালে তিনি দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগের সারণি প্রস্তুত করেন যা প্যাসকেল ত্রিভুজ নামে পরিচিত। এছাড়াও পদার্থবিদ্যায় তাঁর অবদান অপরিসীম।

প্যাসকেল ত্রিভুজ

নিম্নের ত্রিভুজাকার সংখ্যা বিন্যাসকে প্যাসকেলের ত্রিভুজ বলা হয়। ১ম ও ২য় সারির পর যে কোনো সারির পদের সহগগুলো নির্ণয় পদ্ধতি নিম্নরূপ:

সারি	ত্রিভুজীয় ছক	দ্বিপদী রাশির বিস্তার
১ম সারি $\rightarrow n=0$	1	$\rightarrow (a+x)^0 = 1$
২য় সারি $\rightarrow n=1$	1 1	$\rightarrow (a+x)^1 = 1.a + 1.x$
৩য় সারি $\rightarrow n=2$	1 2 1	$\rightarrow (a+x)^2 = 1.a^2+2.ax+1.x^2$
৪র্থ সারি $\rightarrow n=3$	1 3 3 1	$\rightarrow (a+x)^3 = 1.a^3+3.a^2x+3.ax^2+1.x^3$
৫ম সারি $\rightarrow n=4$	1 4 6 4 1	$\rightarrow (a+x)^4 = 1.a^4+4.a^3x+6.a^2x^2+4.ax^3+1.x^4$
৬ষ্ঠ সারি $\rightarrow n=5$	1 5 10 10 5 1	$\rightarrow (a+x)^5 = 1.a^5+5.a^4x+10.a^3x^2+10.a^2x^3+5.ax^4+1.x^5$
৭ম সারি $\rightarrow n=6$	1 6 15 20 15 6 1	$\rightarrow (a+x)^6 = 1.a^6+6.a^5x+15.a^4x^2+20.a^3x^3+15.a^2x^4+6.ax^5+1.x^6$
৮ম সারি $\rightarrow n=7$	1 7 21 35 35 21 7 1	$\rightarrow (a+x)^7 = 1.a^7+7.a^6x+21.a^5x^2+35.a^4x^3+35.a^3x^4+21.a^2x^5+7.ax^6+1.x^7$

ব্যাখ্যা:

- উপরোক্ত সারির দ্বিপদী বিস্তৃতি $(a+x)^n$ এ n=0,1,2,3,4,5,6 এবং7নেওয়া হয়েছে।
- প্রত্যেক সারির প্রান্তিক পদের সহগদ্বয় 1।
- কোনো সারির ১ম ও ২য় পদের সহগদ্বয়ের যোগফল ঐ সারির পরবর্তী সারির ২য় পদের সহগ।
- কোনো সারির ২য় ও ৩য় পদের সহগদ্বয়ের যোগফল ঐ সারির পরবর্তী সারির ৩য় পদের সহগ।
- যেকোনো সারি হতে পরবর্তী সারির সহগগুলো নির্ণয় করা যায়।

মনে করুন, ৮ম সারির পদের সহগগুলো নির্ণয় করতে হবে। আমরা জানি, প্রথম পদ ও শেষ পদের সহগ 1। ৮ম সারির ২য় পদের সহগ হবে ৭ম সারির ১ম ও ২য় পদের সহগদ্বয়ের যোগফল, অর্থাৎ $1+6=7$। ৮ম সারির ৩য় পদের সহগ হবে ৭ম সারির ২য় ও ৩য় পদের সহগদ্বয়ের সমষ্টি, অর্থাৎ $6+15=21$। ৮ম সারির ৪র্থ, ৫ম, ৬ষ্ঠ ও ৭ম পদের সহগগুলো হবে যথাক্রমে, $15+20=35, 20+15=35, 15+6=21$ ও $6+1=7,$ যা প্যাসকেল ত্রিভুজের ৮ম সারিতে বিদ্যমান।

উদাহরণ 1: প্যাসকেল ত্রিভুজের সাহায্যে $(2+x)^6$এর বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।

সমাধান:

সারি	ত্রিভুজীয় ছক	দ্বিপদী রাশির বিস্তার
১ম সারি $\rightarrow n=0$	1	$\rightarrow (2+x)^0 = 1$
২য় সারি $\rightarrow n=1$	1 1	$\rightarrow (2+x)^1 = 1.2+1.x$
৩য় সারি $\rightarrow n=2$	1 2 1	$\rightarrow (2+x)^2 = 1.2^2+2.2.x+1.x^2$
৪র্থ সারি $\rightarrow n=3$	1 3 3 1	$\rightarrow (2+x)^3 = 1.2^3+3.2^2.x+3.2.x^2+1.x^3$
৫ম সারি $\rightarrow n=4$	1 4 6 4 1	$\rightarrow (2+x)^4 = 1.2^4+4.2^3.x+6.2^2.x^2+4.2^3.x+1.x^4$
৬ষ্ঠ সারি $\rightarrow n=5$	1 5 10 10 5 1	$\rightarrow (2+x)^5 = 1.2^5+5.2^4.x+10.2^3.x^2+10.2^2.x^3+5.2.x^4+1.x^5$
৭ম সারি $\rightarrow n=6$	1 6 15 20 15 6 1	$\rightarrow (2+x)^6 = 1.2^6+6.2^5x+15.2^4.x^2+20.2^3.x^3+15.2^2.x^4+6.2.x^5+1.x^6$

$\therefore$ নির্ণেয় $(2+x)^6 = 64+192x+240x^2+160x^3+60x^4+12x^5+x^6$

উদাহরণ 2: প্যাসকেল ত্রিভুজের সাহায্যে $(1-x)^5$এর বিস্তৃতিতে x^3এর সহগ নির্ণয় করুন।

সমাধান:

সারি	ত্রিভুজীয় ছক	দ্বিপদী রাশির বিস্তার
১ম সারি $\rightarrow n=0$	1	$\rightarrow (1-x)^0 = 1$
২য় সারি $\rightarrow n=1$	1 1	$\rightarrow (1-x)^1 = 1.1-1.x$
৩য় সারি $\rightarrow n=2$	1 2 1	$\rightarrow (1-x)^2 = 1.1^2-2.1.x+1.x^2$
৪র্থ সারি $\rightarrow n=3$	1 3 3 1	$\rightarrow (1-x)^3 = 1.1^3-3.1^2.x+3.1.x^2-1.x^3$
৫ম সারি $\rightarrow n=4$	1 4 6 4 1	$\rightarrow (1-x)^4 = 1.1^4-4.1^3.x+6.1^2.x^2-4.1^3.x+1.x^4$
৬ষ্ঠ সারি $\rightarrow n=5$	1 5 10 10 5 1	$\rightarrow (1-x)^5 = 1.1^5-5.1^4.x+10.1^3.x^2-10.1^2.x^3+5.1.x^4-1.x^5$

অতএব, $(1-x)^5 = 1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5$

$\therefore$নির্ণেয় x^3এর সহগ$=-10$

সারসংক্ষেপ

- প্রত্যেক সারির প্রান্তিক পদের সহগদ্বয় 1।
- কোনো সারির ১ম ও ২য় পদের সহগদ্বয়ের যোগফল ঐ সারির পরবর্তী সারির ২য় পদের সহগ।
- কোনো সারির ২য় ও ৩য় পদের সহগদ্বয়ের যোগফল ঐ সারির পরবর্তী সারির ৩য় পদের সহগ।
- যেকোনো সারি হতে পরবর্তী সারির সহগগুলো নির্ণয় করা যায়।

পাঠ ৪.৩ $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ নির্ণয়

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কোনো দ্বিপদী বিস্তৃতির সাধারণ পদ নির্ণয় করতে পারবেন,
- দ্বিপদী রাশির পদসংখ্যা ও সহগ নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সাধারণ পদ

মূলপাঠ

$(a+x)^n$ -এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ(General terms)নির্ণয়

যদি $(a+x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x^1 + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_ra^{n-r}x^r + \ldots\ldots + x^n$

ডানপক্ষের পদগুলোকে ধারাবাহিকভাবে $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{r+1}$দ্বারা সূচিত করা হয়; তাহলে,

প্রথম পদ, $T_1 = a^n = {}^nC_0a^{n-0}x^0 = a^n$

দ্বিতীয় পদ, $T_2 = {}^nC_1a^{n-1}x^1 = na^{n-1}x$

তৃতীয় পদ, $T_3 = {}^nC_2a^{n-2}x^2 = \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2$

চতুর্থ পদ, $T_4 = {}^nC_3a^{n-3}x^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3$

....

....

rতম পদ, $T_r = {}^nC_{r-1}a^{n-r+1}x^{r-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r-1}x^{r-1}$

$r+1$ তম পদ, $T_{r+1} = {}^nC_ra^{n-r}x^r = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}x^r$

সুতরাং এই $T_{r+1} = {}^nC_ra^{n-r}x^r$ পদকে সাধারণ পদ বলে। সাধারণ পদের সাহায্যে আমরা দ্বিপদী রাশির বিভিন্ন পদও সহগ নির্ণয় করতে পারি।

উদাহরণ1:$(1+x)^{44}$এর বিস্তৃতিতে 21 তম পদ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন,$r+1=21$বা, $r=20$.

$\therefore T_{r+1} = T_{20+1} = {}^{44}C_{20}x^{20} = \frac{44!}{20!(44-20)!}x^{20} = \frac{44!}{20!\,24!}x^{20}$

উদাহরণ2:$(x^2-7x)^{12}$এর বিস্তৃতিতেx^{14}এর সহগ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন,T_{r+1}তম পদেx^{14}আছে।

$\therefore T_{r+1} = {}^{12}C_r(x^2)^{12-r}(-7x)^r = {}^{12}C_rx^{24-2r}.(-7)^rx^r = {}^{12}C_r(-7)^rx^{24-2r+r} = {}^{12}C_r(-7)^rx^{24-r}$

এখন সাধারণ পদের x^{24-r}এর ঘাত এবং x^{14}এর ঘাত সমান হবে।

$\therefore\ 24-r = 14$বা$r = 24-14 = 10$.

$\therefore T_{10+1} = {}^{12}C_{10}(-7)^{10}x^{24-10} = {}^{12}C_{10}.7^{10}x^{14}$

অতএব x^{14} এর সহগ = ${}^{12}C_{10}\,(7)^{10}$

উদাহরণ3: $\left(\frac{1}{x^2}-x\right)^{18}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি নির্ণয় করুন।

সমাধান: x বর্জিত পদ বলতে আমরা সেই পদকে বুঝি যে পদে x থাকে না অর্থাৎ x এর ঘাত শূন্য থাকে।[$x^0 = 1$].

মনে করুন T_{r+1} তম পদে x^0 আছে।

$\therefore T_{r+1}= {}^{18}C_r\left(\frac{1}{x^2}\right)^{18-r}.(-x)^r= {}^{18}C_r x^{-36+2r}(-1)^r x^r= {}^{18}C_r x^{-36+3r}(-1)^r$

যেহেতু এ পদটি x বর্জিত

$\therefore\ -36+3r=0$

বা $3r = 36 \Rightarrow r = 12.$

$\therefore$ নির্ণেয় পদ= $T_{13} = {}^{18}C_{12}\,(-1)^{12}.x^0=\frac{18!}{12!(18-12)!}=\frac{18!}{12!\,6!}=18564$

উদাহরণ4: m,n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে $(1+x)^m\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $(1+x)^m\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=(1+x)^m\left(\frac{x+1}{x}\right)^n=\frac{(1+x)^{m+n}}{x^n}$

মনে করুন, $r+1$ তম পদটি x বর্জিত পদ। এখানে, $r+1$ তম পদ $=\frac{1}{x^n}.{}^{m+n}C_r x^r={}^{m+n}C_r x^{r-n}$

যেহেতু $r+1$ তম পদটি x বর্জিত, সুতরাং ঐ পদে এর x ঘাত শূন্য হবে।

অতএব, $r-n=0 \ \Rightarrow\ r=n$

অতএব, নির্ণেয় x বর্জিত পদ $= {}^{m+n}C_n$

উদাহরণ5: $\left(2x^2+\frac{b}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এবং x^{15} এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান হলে b এর ধনাত্মক মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $\left(2x^2+\frac{b}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $r+1$ তম পদসাধারণপদ।

সুতরাং $r+1$ তম পদ $= {}^{10}C_r\left(2x^2\right)^{10-r}\left(\frac{b}{x^3}\right)^r = {}^{10}C_r(2)^{10-r}(b)^r x^{20-2r-3r} = {}^{10}C_r(2)^{10-r}(b)^r x^{20-5r}$

যদি $r+1$ তম পদে x^5 থাকেঅর্থাৎ $20-5r=5$ বা, $r=3$

আবার যদি $r+1$ তম পদে x^{15} থাকে তবে $20-5r=15$ অর্থাৎ $r=1$

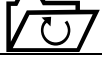
এখন x^5 এবং x^{15} এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান হলে,

${}^{10}C_3(2)^{10-3}(b)^3 = {}^{10}C_1(2)^{10-1}(b)^1$

বা, $\frac{10!\times 2^7}{3!\times 7!}b^3 = 10\times 2^9\times b$

বা, $\frac{10\times 9\times 8\times 7!\times 2^7}{3!\times 7!}b^3 = 10\times 2^9\times b$

বা, $\frac{9\times 8}{3\times 2}b^3=2^2\times b$ বা, $12b^3=4b$ বা, $b^2=\frac{1}{3}$

$\therefore b=\frac{1}{\sqrt{3}}$, [ধনাত্মক মান নিয়ে]

সারসংক্ষেপ

- $(a+x)^n$ -এর বিস্তৃতির $T_{r+1}={}^nC_r a^{n-r}x^r$ পদকে সাধারণ পদ বলা হয়।
- সাধারণ পদের সাহায্যে আমরা দ্বিপদী রাশির বিভিন্ন পদও সহগ নির্ণয় করতে পারি।

পাঠ ৪.৪ $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয়

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কোনো দ্বিপদী বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	দ্বিপদী বিস্তৃতির মধ্যপদ

মূলপাঠ

$(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ(Middle terms)নির্ণয়, যেখানেnএকটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা

আমরা জানি, $(a+x)^n$এর বিস্তৃতিতে মোট পদ সংখ্যা $= n+1$।এখন মনে করুন, উহার $(r+1)$তমপদটিমধ্যপদ।সুতরাংউক্তপদেরঅগ্রেওপশ্চাতেসমানসংখ্যকপদথাকবে।যেহেতু$(r+1)$তমপদেরপশ্চাতেrসংখ্যক পদ আছে, সেহেতু উহার অগ্রেওrসংখ্যক পদ থাকবে।তাহলে$(a+x)^n$এর বিস্তৃতিতে মোট পদ সংখ্যা

$= (r) + (1) + (r) = 2r+1.$

পশ্চাতে মাঝে অগ্রে

$\therefore n+1 = 2r+1$বা$r = \frac{n}{2}$

(i) nধনাত্মক জোড় সংখ্যা হলে, মধ্যপদ হবে $T_{\frac{n}{2}+1}$ বা $T_{\frac{n+2}{2}}$ তম পদ।

$$\therefore T_{\frac{n}{2}+1} = {}^nC_{\frac{n}{2}} a^{n-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}} = {}^nC_{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}}$$

(ii) nধনাত্মক বিজোড় সংখ্যা হলে,মধ্যপদ হবে$T_{\frac{n+1}{2}}$ এবং $T_{\frac{n+3}{2}}$ তম পদদ্বয়।

$$\therefore T_{\frac{n+1}{2}} = {}^nC_{\frac{n+1}{2}-1}\, a^{n-\left(\frac{n+1}{2}-1\right)} x^{\frac{n+1}{2}-1} = {}^nC_{\frac{n-1}{2}}\, a^{\frac{n+1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\therefore T_{\frac{n+3}{2}} = T_{\frac{n+1}{2}+1} = {}^nC_{\frac{n+1}{2}}\, a^{n-\frac{n+1}{2}} . x^{\frac{n+1}{2}} = {}^nC_{\frac{n+1}{2}}\, a^{\frac{n-1}{2}} . x^{\frac{n+1}{2}}$$

উদাহরণ1: $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{16}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে $n=16$, জোড় সংখ্যা

সুতরাং মধ্যপদ= $T_{\frac{16+2}{2}} = T_9 = T_{8+1} = {}^{16}C_8\left(\frac{x}{y}\right)^8 . \left(\frac{y}{x}\right)^8 = {}^{16}C_8 = \frac{16!}{8!8!} = 12870$

উদাহরণ2: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে $n = 11$, বিজোড় সংখ্যা

সুতরাং মধ্যপদ দুইটি হচ্ছে, $T_{\frac{11+1}{2}} = T_6$ এবং $T_{\frac{11+3}{2}} = T_7$

$$\therefore T_6 = T_{5+1} = {}^{11}C_5(x)^{11-5}\left(-\frac{1}{x}\right)^5 = {}^{11}C_5 x^6 (-1)^5 . \frac{1}{x^5} = -462\, x$$

$$\therefore T_7 = T_{6+1} = {}^{11}C_6\,(x)^{11-6}\left(-\frac{1}{x}\right)^6 = {}^{11}C_6 x^5 \frac{1}{x^6} = \frac{462}{x}$$

উদাহরণ3: দেখান যে, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর দ্বিপদী বিস্তৃতিতে মধ্যপদ সমান $\frac{1.3.5.....(2n-1)}{n!}(-2)^n$

সমাধান: এখানে বিস্তৃতিটির ঘাত জোড় সংখ্যা।

সুতরাং, মধ্যপদ হবে, $T_{\frac{2n+2}{2}} = T_{\frac{2(n+1)}{2}} = T_{n+1}$

এখন, $T_{n+1} = {}^{2n}C_n(x)^{2n-n}\left(-\frac{1}{x}\right)^n = {}^{2n}C_n(x)^n(-1)^n\left(\frac{1}{x}\right)^n$

$$= {}^{2n}C_n x^n (-1)^n \frac{1}{x^n} = \frac{2n!}{n!(2n-n)!}(-1)^n = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)........4.3.2.1}{n!(2n-n)!}(-1)^n$$

$$= \frac{\{2n(2n-2)(2n-4)........6.4.2\}\{(2n-1)(2n-3)(2n-5)......5.3.1\}}{(n!)^2}(-1)^n$$

$$= \frac{[(2.n)\{2.(n-1)\}\{2.(n-2)\}.........(2.3).(2.2).(2.1)]\{(2n-1)(2n-3)(2n-5).......5.3.1\}}{(n!)^2}(-1)^n$$

$$= \frac{2^n n!\{1.3.5....(2n-5)(2n-3)(2n-1)\}}{(n!)^2}(-1)^n = \frac{2^n\{1.3.5....(2n-5)(2n-3)(2n-1)\}}{(n!)}(-1)^n$$

$$= \frac{\{1.3.5....(2n-3)(2n-1)\}}{n!}(-2)^n$$ [প্রমাণিত]

সারসংক্ষেপ

- $(a+x)^n$ -এর বিস্তৃতিতে n ধনাত্মক জোড় সংখ্যা হলে মধ্যপদ হবে, $T_{\frac{n}{2}+1} = {}^nC_{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}}$
- $(a+x)^n$ -এর বিস্তৃতিতে n ধনাত্মক বিজোড় সংখ্যা হলে মধ্যপদ হবে, $T_{\frac{n+1}{2}} = {}^nC_{\frac{n-1}{2}}\, a^{\frac{n+1}{2}} . x^{\frac{n-1}{2}}$ এবং $T_{\frac{n+3}{2}} = {}^nC_{\frac{n+1}{2}}\, a^{\frac{n-1}{2}} . x^{\frac{n+1}{2}}$ তম পদদ্বয়।

পাঠ ৪.৫ দ্বিপদী ধারা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিপদী ধারা কী তা বর্ণনা করতে পারবেন,
- দ্বিপদী ধারা সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	দ্বিঘাত সমীকরণ, দ্বিপদী ধারা

মূলপাঠ

দ্বিপদী ধারা (Binomial Series)

(a)আমরা জানি,$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+ - - - +\frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!}x^r+ .... +x^n$--------(i)

(i)নং এর ডানদিকের বিস্তৃতিরধারাকে দ্বিপদী ধারা বলা হয়। এখানে,

(ক)$(1+x)^n$এর বিস্তৃতিতে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে ধারাটি **সমীম** হবে এবং nঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা বা ভগ্নাংশ (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)হলে ধারাটি অসীম হবে।

(খ)$|x|<1$অর্থাৎ $-1<x<1$

(b) $n \in \Theta$**কিন্তু** $n \in \mathrm{N}$**এর জন্য** $(a+x)^n$ **এর বিস্তৃতি**

$$(a+x)^n = a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+ .... +\frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!}a^{n-r}x^r+ .... +x^n \text{----------- (ii)}$$

(ক) $|a|>|x|$ হলে $\left|\frac{x}{a}\right|<1$

$$\therefore (a+x)^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n = a^n\left\{1+n.\frac{x}{a}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+..................\right\}$$

$$= a^n+n.a^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+..............$$

(খ) $|a|<|x|$ হলে $\left|\frac{a}{x}\right|<1$

$$\therefore (a+x)^n = x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n = x^n\left\{1+n.\frac{a}{x}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{a}{x}\right)^2+..................\right\}$$

$$= x^n+n.a.x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}a^2.x^{n-2}+..................$$

সুতরাং, n ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা বা ভগ্নাংশ এর জন্য $(a+x)^n$কে অসীম ধারায় প্রকাশ করতে 1এবং দ্বিতীয় পদ 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতম নিতে হয়।

মন্তব্য: $|a|=|x|$ হলে, যখন $x=a$ তখন $(a+a)^n=(2a)^n$ আবার যখন $x=-a$ তখন $(a-a)^n=(0)^n=0$

সুতরাং, কোনো ক্ষেত্রেই দ্বিপদী বিস্তৃতির প্রয়োজন নেই।

(c)অনন্ত দ্বিপদী ধারার অভীসৃতি (Convergency of Binomial Series) :

n এর যে কোন মানের জন্য –

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+.......+\frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!}x^r+........ ------ (i)$$

ধারাটিকে দ্বিপদী ধারা বলা হয়।

(ক) যখন $n \in \mathbf{N}$হয় অর্থাৎ n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয় তখন ধারাটি সান্ত এবং এর মান $(1+x)^n$.

$$\therefore (1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+.......+\frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!}x^r+.........$$

(খ) যখন $n \in \mathbf{N}$ব্যতীত যে কোন মূলদ সংখ্যা অর্থাৎ n ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা বা ভগ্নাংশ (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)হলে ধারাটি অনন্ত হবে। কারণ, $n \in \mathbf{N}$ না হলে, $\frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!}$ এর মান শূন্য হতে পারে না।

কোন অসীম ধারার যোগফল একটি নির্দিষ্ট সসীম সংখ্যা হলেতাকে অভিসারী ধারা বলা হয়। আবার, কোন অনন্ত ধারার যোগফল একটি নির্দিষ্ট সসীম সংখ্যা না হলে তাকে অপসারী ধারা বলা হয়।

দ্বিপদী অনন্ত ধারাটি অভিসারী হবে যদি x এর মান -1এর চেয়ে বড় এবং 1 এর চেয়ে ছোট হয় অর্থাৎ, $|x|<1$ হয় এবং শুধু তখনই অনন্ত ধারাটির মান $(1+x)^n$ হবে।

$$\therefore (1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+.........+\frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!}x^r+.......\infty,$$

যখন $n \notin \mathbf{N}$এবং $|x|<1$

$n=-1$ এবং x এর পরিবর্তে $-x$ লিখে দ্বিপদী ধারা হতে পাই,

$$1+(-1)(-x)+\frac{(-1)(-2)}{2!}(-x)^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}(-x)^3+......+\frac{(-1)(-2)(-3).....(-r)}{r!}(-x)^r+........\infty$$

$$=1+x+x^2+x^3+x^4+........+x^r+.........\infty$$

ধারাটির প্রথম r সংখ্যক পদের যোগফল $=\frac{1-x^r}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^r}{1-x}$

যখন $|x|<1$ তখন r এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে x^r এর মান হ্রাস পেতে থাকে এবং $r\to\infty$ হলে $x^r\to 0$ হয়। ফলে $\frac{x^r}{1-x}\to 0$ হয় এবং সেক্ষেত্রে ধারাটির মান $\frac{1}{1-x}$ অর্থাৎ $(1-x)^{-1}$ হয়।

$\therefore 1+x+x^2+x^3+x^4+.............\infty=(1-x)^{-1}$ ধারাটি অভিসারী।

নিম্নের বিস্তৃতিগুলো দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে সহজেই নির্ণয় করা যায়ঃ $-1<x<1$ হলে,

$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+.....\ ....+x^r+.............$------------- (i)

$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+............+(-1)^r x^r+..........$ ----------(ii),[(i) নং এ xপরিবর্তে $(-x)$বসিয়ে পাই।]

$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+........+(r+1)x^r+........$------(iii),[(i) নং কে xসাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই।]

$(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+.....+(r+1)(-1)^r x^r+.....$------(iv),[(iii) নং এ xপরিবর্তে $(-x)$বসিয়ে পাই।]

$(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+10x^3+....+\frac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r+....$ --(v),[(iii) নং কে xসাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই।]

$(1+x)^{-3}=1-3x+6x^2-10x^3+.....+\frac{1}{2}(r+1)(r+2)(-1)^r x^r+.....$-----(vi) [(v) নং এ xপরিবর্তে $(-x)$বসিয়ে পাই।]

আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশের মাধ্যমে দ্বিপদী বিস্তৃতি নির্ণয়

কোনো মূলদ বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের দ্বিপদী বিস্তৃতি নির্ণয় করার জন্য ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর করে প্রত্যেক অংশের জন্য দ্বিপদী বিস্তৃতি নির্ণয় করতে হয়।

আংশিক ভগ্নাংশে বিশ্লেষণের পদ্ধতি

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x-\alpha)(x-\beta)^2(mx^2-\gamma)} \equiv \frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{(x-\beta)^2}+\frac{Dx+E}{mx^2-\gamma}$$

সাংখ্যমান বৃহত্তম পদ নির্ণয় পদ্ধতি

$(a\pm x)^n$ বিস্তৃতিতে সাংখ্যমান বৃহত্তম পদের জন্য, $\frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{n-r+1}{r}.\frac{x}{a}=1,$ যখন $n>0$

$$\frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{n-r+1}{r}.\frac{x}{a}=-1, \text{ যখন } n<0$$

পূর্ণসংখ্যা হলেও সাংখ্যমান বৃহত্তম পদ। ভগ্নাংশ হলে পরবর্তী পূর্ণসংখ্যা তম পদটির সাংখ্যমান বৃহত্তম।

উদাহরণ1: $(1-2x)^{-2}$কে চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তার করুন।

সমাধান: $(1-2x)^{-2} = 1+(-2)(-2x)+\frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-2x)^2+\frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!}(-2x)^3+ \ldots\ldots$

$= 1+4x+12x^2+32x^3+ \ldots\ldots$

উদাহরণ2: প্রমাণ করুন, $(1+x+x^2+ \ldots\ldots \infty)(1+2x+3x^2+ \ldots\ldots \infty)=\frac{1}{2}(1.2+2.3x+3.4x^2+ \ldots\ldots \infty)$

সমাধান: বামপক্ষ $= (1+x+x^2+ \ldots\ldots\infty)(1+2x+3x^2+ \ldots\ldots\infty)$

$= (1-x)^{-1}.(1-x)^{-2}= (1-x)^{-3}= 1+3x+6x^2+ \ldots\ldots\infty =\frac{1}{2}(1.2+2.3x+3.4x^2+ \ldots\ldots\infty)$

উদাহরণ3: $\frac{1}{\sqrt[3]{8-5x}}$ কে x-এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত করুন এবং x-এর মান কত হলে বিস্তৃতি বৈধ হবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\frac{1}{\sqrt[3]{8-5x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8\left(1-\frac{5}{8}x\right)}}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{\left(1-\frac{5}{8}x\right)}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{8}x\right)^{-\frac{1}{3}}$

$$\therefore \frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{8}x\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{8}x\right)+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(-\frac{5}{8}x\right)^2+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(-\frac{5}{8}x\right)^3+\ldots\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{5}{24}x+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)}{2!}\left(-\frac{5}{8}\right)^2x^2+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{3!}\left(-\frac{5}{8}\right)^3x^3+\ldots\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{5}{24}x+\frac{1.4}{2!.3^2}\left(\frac{5}{8}\right)^2x^2+\frac{1.4.7}{3!.3^3}\left(\frac{5}{8}\right)^3x^3+\ldots\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{5}{24}x+\frac{1.4}{2!}\left(\frac{5}{24}\right)^2x^2+\frac{1.4.7}{3!}\left(\frac{5}{24}\right)^3x^3+\ldots\ldots\right\}$$

দ্বিপদী বিস্তৃতিটির বৈধ হওয়ার শর্ত হলো, $\left|\frac{5x}{8}\right|<1$ অর্থাৎ, $-\frac{8}{5}<x<\frac{8}{5}$ ।

উদাহরণ4: $y=x-x^2+x^3-x^4+......\infty$ হলে দেখান যে, $x=y+y^2+y^3+y^4+......\infty$ ।

সমাধান: দেওয়া আছে, $y=x-x^2+x^3-x^4+......\infty$

$\Rightarrow -y=-x+x^2-x^3+x^4-......\infty$

$\Rightarrow 1-y=1-x+x^2-x^3+x^4-......\infty=(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}$, [উভয় পক্ষে 1 যোগ করে]

$\Rightarrow 1+x=\frac{1}{1-y}=(1-y)^{-1}=1+y+y^2+y^3+y^4+......\infty$

$\Rightarrow x=y+y^2+y^3+y^4+......\infty$

উদাহরণ5: দেখান যে, $(1-5x+6x^2)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $3^{r+1}-2^{r+1}$ ।

সমাধান: $(1-5x+6x^2)^{-1}=\frac{1}{1-5x+6x^2}=\frac{1}{1-3x-2x+6x^2}=\frac{1}{1(1-3x)-2x(1-3x)}=\frac{1}{(1-3x)(1-2x)}$

$=\frac{1}{(1-3x)(1-2.\frac{1}{3})}+\frac{1}{(1-3.\frac{1}{2})(1-2x)}$

[নোট: $1-3x=0$ হলে $x=\frac{1}{3}$, $\therefore (1-3x)$ ব্যতীত প্রত্যেক পদে x এর মান $\frac{1}{3}$ বসানো হয়েছে। অনুরূপভাবে, $1-2x=0$ হলে $x=\frac{1}{2}$, $\therefore (1-2x)$ ব্যতীত প্রত্যেক পদে x এর $\frac{1}{2}$ মান বসানো হয়েছে।]

$=\frac{1}{\frac{1}{3}(1-3x)}+\frac{1}{-\frac{1}{2}(1-2x)}=3(1-3x)^{-1}-2(1-2x)^{-1}$

$=3(1+3x+3^2x^2+3^3x^3+3^4x^4+.......+3^rx^r+.....)$

$-2(1+2x+2^2x^2+2^3x^3+......+2^rx^r+.......)$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $=3.3^r-2.2^r=3^{r+1}-2^{r+1}$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1 - 10):

▶নিচের প্যাসকেল ত্রিভুজটি লক্ষ্য করুন এবং প্রদত্ত উপাত্তের আলোকে (1-5) নং প্রশ্নের উত্তর দিন

১ম সারি $\rightarrow n=0$ 1
২য় সারি $\rightarrow n=1$ 1 1
৩য় সারি $\rightarrow n=2$ 1 2 1
৪র্থ সারি $\rightarrow n=3$ 1 3 3 1
৫ম সারি $\rightarrow n=4$ 1 4 6 4 1
৬ষ্ঠ সারি $\rightarrow n=5$ 1 5 10 10 5 1
৭ম সারি $\rightarrow n=6$ 1 6 15 20 15 6 1

1. প্যাসকেল ত্রিভুজের আলোকে কোনো দ্বিপদী রাশির প্রথম পদ ও শেষ পদের সহগ দুটি হবে নিচের কোনটি?
   (ক) 1,1 (খ) 1,0 (গ) 0,1 (ঘ)2,2
2. প্যাসকেল ত্রিভুজের ৪র্থ সারির উপাদান সংখ্যা কয়টি?
   (ক) 2 (খ) 3 (গ) 4 (ঘ)5
3. প্যাসকেল ত্রিভুজ অনুযায়ী n=4 হলে দ্বিপদী সহগগুলো নিচের কোনটি?
   (ক)1,3,6,5,1 (খ) 1,3,4,6,1 (গ) 1,6,4,3,1 (ঘ)1,4,6,4,1
4. প্যাসকেল ত্রিভুজ অনুযায়ী $(1+x)^5$ এর বিস্তৃতি নিচের কোনটি?
   (ক) $1+5x+15x^2+10x^3+5x^4+x^5$ (খ) $1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$
   (গ) $1+5x+10x^2+20x^3+5x^4+x^5$ (ঘ) $1+5x+10x^2+20x^3+5x^4+x^5$
5. প্যাসকেল ত্রিভুজ থেকে $(1-2x)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^4 এর সহগ নিচের কোনটি?
   (ক) 240 (খ) –240 (গ) –192 (ঘ)192
6. $(1+2x)^{10}$ -এর বিস্তৃতিতে x^4 এর সহগ কোনটি?
   (ক)3360 (খ) 3460 (গ) 3380 (ঘ)3395

▶ $\left(\frac{a}{x}-bx\right)^{12}$ একটি দ্বিপদী রাশি হলে প্রদত্ত উপাত্তের আলোকে (7-9) নং প্রশ্নের উত্তর দিন

7. রাশিটির বিস্তৃতিতে কত তম পদমধ্যপদ?
   (ক) 5তম (খ) 6তম (গ) 7তম (ঘ)8তম
8. রাশিটির কত তম পদ x বর্জিত?
   (ক) 6তম (খ) 13তম (গ) 24 তম (ঘ) 7তম
9. $a=\frac{1}{b}$ হলে x বর্জিত পদের মান কোনটি?
   (ক) $^{12}C_6$ (খ) $^{12}C_7$ (গ) $^{12}C_8$ (ঘ) $^{12}C_5$
10. $(1+x)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ কোনটি?
    (ক) –1 (খ) 1 (গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ)r+1
11. প্যাসকেল ত্রিভুজের সাহায্যে $(3-x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।
12. $\left(x^3-\frac{1}{2x}\right)^{10}$এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ নির্ণয় করুন।
13. $\left(2x+\frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ বা ধ্রুব পদ বা x^0যুক্ত পদ নির্ণয় করুন এবং এর মান নির্ণয় করুন।
14. $(1+x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে 21 তম এবং 22তম পদ দুইটি সমান হলে x এর মান নির্ণয় করুন।
15. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদেরমান নির্ণয় করুন।
16. $\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদেরমান নির্ণয় করুন।
17. $\left(2x^2-\frac{1}{2x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদেরমান নির্ণয় করুন।
18. $\left(2x-\frac{1}{4x^2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদেরমান নির্ণয় করুন।

19. $\left(\frac{x^4}{y^3}+\frac{y^2}{2x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে y বর্জিত পদটি নির্ণয় করুন এবং এরমান নির্ণয় করুন।

20. $n\in\mathbf{N}$ হলে, $\left(3+\frac{x}{2}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^5 তম এবং x^{15} তম পদ দুইটি সমান হলে n এর মান নির্ণয় করুন।

21. $\frac{1}{(1-x)(1-2x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় করুন।

22. $\frac{x}{(1-4x)(1-5x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় করুন।

23. $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^3}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় করুন।

24. $\left(x^2+\frac{3a}{x}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে x^{18} এর সহগ নির্ণয় করুন।

25. $(px^4+qx)^9$ এর বিস্তৃতিতে x^{18} এর সহগ নির্ণয় করুন।

26. $n\in\mathbf{N}$ হলে, $\left(2x+\frac{1}{6x}\right)^6$ এবং $\left(x+\frac{1}{3x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ সমান হলে প্রমাণ করুন যে, $n=3$ ।

27. $n\in\mathbf{N}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $(x^2+2x+2)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এবং x^3 এর সহগদ্বয় যথাক্রমে $2^{n-1}n^2$ এবং $\frac{2^{n-1}}{3}n(n^2-1)$

28. $n\in\mathbf{N}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $\frac{(1+x)^n}{1-x}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ 2^n.

29. দেখান যে, $\frac{1}{(1-x)(3-x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{n+1}})$.

30. $y=2x+3x^2+4x^3+......\infty$ হলে দেখান যে, $x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{8}y^2+\frac{5}{16}y^3-......\infty$

সৃজনশীল প্রশ্ন:

31. $f(x)=\left(2-\frac{3}{x}\right)^{15}$

(ক) $n=5$ এর জন্য প্যাসকেল ত্রিভুজটি অঙ্কন করুন।
(খ) $f(x)$ এর বিস্তৃতিতে কততম পদ x বর্জিত এবং পদটি নিণয় করুন।
(গ) $f(x)$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ দুইটির পার্থক্য নির্ণয় করুন যখন $x=1$ ।

32. $\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$ এবং $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ দুইটি রাশি।

(ক) $n=4$ এর জন্য প্যাসকেল ত্রিভুজটি অঙ্কন করুন।
(খ) ১ম রাশিটির দ্বিপদী বিস্তৃতির x^n এর সহগ নির্ণয় করুন।
(গ) যদি $|x|<1$ হয় তবে ২য় রাশিটি বিস্তার করে যে ধারাটি পাওয়া তা অভিসৃত কিনা ব্যাখ্যা করুন।

33. $\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{m}}{x^2}\right)^{10}$ এবং $\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ দুইটি দ্বিপদী রাশি।

(ক) ১ম রাশিটির ৪র্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।
(খ) ১ম রাশিটির x বর্জিত পদ405হলে m এর মান নির্ণয় করুন।
(গ) ২য় রাশিটির বিস্তৃতিতে দেখান যে x^r এর সহগ ${}^nC_{\frac{4n-2r}{5}}$ ।

34. $\left(3x-\frac{5}{x^2}\right)^{15}$ এবং $\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$ দুইটি দ্বিপদী রাশি।
(ক) ১ম দ্বিপদী রাশিটির সাধারণ পদ নির্ণয় করুন।
(খ)১ম দ্বিপদী রাশিটির মধ্যপদ নির্ণয় করুন।
(গ) ২য় দ্বিপদী রাশিটির x এর উর্ধক্রম অনুসারে ৫ম পদ অনুসারে বিস্তৃত করুন এবং দেখান যে,
$1-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}.\frac{1}{5^2}-\frac{1}{2^2}.\frac{1}{5^3}-\frac{1}{2^3}.\frac{1}{5^4}-......=\sqrt{\frac{3}{5}}$

35. $f(x)=2x+3x^2+4x^3+.....$
(ক) $f(x)$ ফাংশনটির ১০ম পদ নির্ণয় করুন।
(খ) $f(0.5)$ এর সঠিক মাননির্ণয় করুন।
(গ)উদ্দীপকের সাহায্যে দেখান যে, $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3-......$

উত্তরমালা

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1.ক 2. গ 3. ঘ 4. খ 5. ক 6.ক 7. গ 8. ঘ 9. ক 10. খ

11. $243-405x+270x^2-90x^3+15x^4-x^5$ 12. $-\frac{^{10}C_5}{2^r}$ 13. $\frac{28}{7}$ 14. $\frac{7}{8}$

15. $(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ 16. $(-1)^{12}C_6=924$ 17. 840 18. 495 19.7তম পদ, $\frac{105x^{10}}{32}$

20. 55 21. $2^{r+1}-1$ 22. 5^n-4^n 23. $2r^2+2r+1$ 24. $110565a^4$ 25. $84a^3b^6$

31. খ. 32768 গ. $\left\{^{15}C_8 2^7(-3)^8\right\}-\left\{^{15}C_7 2^8(-3)^7\right\}=9006940800$

32. খ. $-\left(2+\frac{3}{2^{n+1}}\right)$ গ. অভিসৃত

33.ক. $x^5-10\sqrt{m}x^{\frac{5}{2}}+45m-$ খ. $m=5$ গ. $^nC_{\frac{4n-2r}{5}}$

34. ক. $(-1)^r\,{}^{15}C_r 3^{15-r}5^r x^{15-3r}$ খ. $\frac{6435\times3^7\times5^8}{x^9}$

35. ক. $11x^{10}$ খ. 3